

成都市 2018 级高中毕业班第一次诊断性检测

数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}$ ,  $B = \{x \mid |x - 1| < 3, x \in \mathbf{N}\}$ , 则  $A \cap B =$   
 (A)  $\{1, 2, 3\}$  (B)  $\{0, 1, 2, 3\}$   
 (C)  $\{x \mid -1 < x < 4\}$  (D)  $\{x \mid -2 < x < 4\}$
2. 复数  $z = \frac{1+2i}{i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  的共轭复数是  
 (A)  $-2-i$  (B)  $-2+i$  (C)  $2-i$  (D)  $2+i$
3. 若等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 + a_3 = 2, a_2 - a_4 = 6$ , 则  $a_6 =$   
 (A)  $-32$  (B)  $-8$  (C)  $8$  (D)  $64$
4. 甲乙两台机床同时生产一种零件,10 天中,两台机床每天出的次品数分别是:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | 0 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 乙 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$  分别表示甲乙两组数据的平均数,  $S_1, S_2$  分别表示甲乙两组数据的方差, 则下列选项正确的是

- (A)  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2, S_1 > S_2$  (B)  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, S_1 > S_2$   
 (C)  $\bar{x}_1 < \bar{x}_2, S_1 > S_2$  (D)  $\bar{x}_1 > \bar{x}_2, S_1 < S_2$

5. 若函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$  有且仅有一个零点, 则实数  $a$  的取值范围为  
 (A)  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$   
 (C)  $[0, 4]$  (D)  $(-8, 0)$

6. 若向量  $a, b$  满足  $|a| = 2, |b| = 1, (a + 2b) \cdot a = 6$ , 则  $\cos \langle a, b \rangle =$   
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 设  $a = \log_{2020} \sqrt{2021}, b = \ln \frac{2020}{2021}, c = 2021^{\frac{1}{2020}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是

- (A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $c > a > b$  (D)  $c > b > a$

8. 若  $\alpha, \beta, \gamma$  是空间中三个不同的平面,  $\alpha \cap \beta = l, \alpha \cap \gamma = m, \gamma \cap \beta = n$ , 则  $l \parallel m$  是  $n \parallel m$  的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 已知平行于  $x$  轴的一条直线与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  相交于  $P, Q$  两点,  $|PQ| = 4a$ ,

$\angle PQO = \frac{\pi}{3}$  ( $O$  为坐标原点), 则该双曲线的离心率为

- (A)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (C)  $\sqrt{6}$  (D)  $\sqrt{5}$

10. 已知锐角  $\varphi$  满足  $\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi = 1$ . 若要得到函数  $f(x) = \frac{1}{2} - \sin^2(x + \varphi)$  的图象, 则可

以将函数  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$  的图象

- (A) 向左平移  $\frac{7\pi}{12}$  个单位长度 (B) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度  
 (C) 向右平移  $\frac{7\pi}{12}$  个单位长度 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度

11. 已知抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ , 过  $F$  的直线  $l$  与抛物线相交于  $A, B$  两点,  $P(0, -\frac{7}{2})$ .

若  $PB \perp AB$ , 则  $|AF| =$

- (A)  $\frac{3}{2}$  (B)  $2$  (C)  $\frac{5}{2}$  (D)  $3$

12. 已知函数  $f(x) = x + \ln x, g(x) = x \ln x$ . 若  $f(x_1) = \ln t, g(x_2) = t$ , 则  $x_1 x_2 \ln t$  的最小值为

- (A)  $\frac{1}{e^2}$  (B)  $\frac{2}{e}$  (C)  $-\frac{1}{e}$  (D)  $-\frac{1}{e^2}$

## 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 2x^2 - 17$ , 则  $f(f(\sqrt{7})) =$  \_\_\_\_\_.

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \leq 1, \\ 2x + y \geq -1, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x - 3y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_n + 2S_n = 3^n$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $3^{b_n} = \frac{1}{2}(3a_{n+2} - a_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则数列  $\{b_n\}$  的前 10 项和为 \_\_\_\_\_.

16. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $PA = AB = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ . 三棱锥  $P-ABC$  的所有顶点都在球  $O$  的表面上, 则球  $O$  的半径为 \_\_\_\_\_; 若点  $M$  是  $\triangle ABC$  的重心, 则过点  $M$  的平面截球  $O$  所得截面的面积的最小值为 \_\_\_\_\_. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 点  $M$  在边  $AC$  上,  $CM = 3MA$ ,  $\tan \angle ABM = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ,  $\tan \angle BMC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(I) 求角  $A$  的大小;

(II) 若  $BM = \sqrt{21}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (本小题满分 12 分)

一网络公司为某贫困山区培养了 100 名“乡土直播员”, 以帮助宣传该山区文化和销售该山区的农副产品, 从而带领山区人民早日脱贫致富. 该公司将这 100 名“乡土直播员”中每天直播时间不少于 5 小时的评为“网红乡土直播员”, 其余的评为“乡土直播达人”. 根据实际评选结果得到了下面  $2 \times 2$  列联表:

|    | 网红乡土直播员 | 乡土直播达人 | 合计  |
|----|---------|--------|-----|
| 男  | 10      | 40     | 50  |
| 女  | 20      | 30     | 50  |
| 合计 | 30      | 70     | 100 |

(I) 根据列联表判断是否有 95% 的把握认为“网红乡土直播员”与性别有关系?

(II) 在“网红乡土直播员”中按分层抽样的方法抽取 6 人, 在这 6 人中选 2 人作为“乡土直播推广大使”, 求这两人中恰有一男一女的概率.

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d$ .

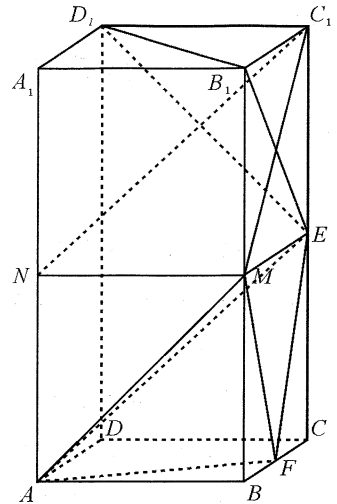
|                   |       |       |       |       |       |       |        |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
| $k_0$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

19. (本小题满分 12 分)

如图, 长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面是边长为 2 的正方形,  $AA_1 = 4$ , 点  $E, F, M, N$  分别为棱  $CC_1, BC, BB_1, AA_1$  的中点.

(I) 求三棱锥  $E-AFM$  的体积;

(II) 求证: 平面  $B_1D_1E \perp$  平面  $C_1MN$ .



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (x-2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(II) 当  $x < 1$  时, 不等式  $f(x) + (x+1)e^x + \frac{a}{2}x^2 - 2ax + a > 0$

恒成立, 求  $a$  的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  与圆  $x^2 + y^2 = 2$  相切.

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于不同的两点  $A, B$ ,  $M$  为线段  $AB$  的中点,  $O$  为坐标原点, 射线  $OM$  与椭圆  $C$  相交于点  $P$ , 且  $|OP| = \sqrt{15}|OM|$ . 求  $\triangle ABO$  的面积.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha \\ y = 2 + \sin\alpha - \cos\alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 以坐标原点

$O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ .

(I) 求曲线  $C$  的普通方程和直线  $l$  的直角坐标方程;

(II) 设点  $P(0, 2)$ , 若直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点, 求  $||PA| - |PB||$  的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |3-x| + |x-m|$  ( $m > 2$ ) 的最小值为 1.

(I) 求不等式  $f(x) + |x-m| > 2$  的解集;

(II) 若  $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = \frac{3}{2}m$ , 求  $ac + 2bc$  的最大值.